第28卷 第3期　　工 程 数 学 学 报　　Vol. 28 No. 3
2011年06月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　June 2011

文章编号:1005-3085(2011)03-0385-08

有理三次Hermite插值样条及其逼近性质*

谢 进[1,2]，檀结庆[2]，李声锋[3]

(1- 合肥工业大学计算机与信息学院，合肥 230009；2- 合肥学院数学与物理系，合肥 230601；
3- 蚌埠学院数学与物理系，蚌埠 233000)

摘 要: 提高插值曲线曲面的逼近性是计算辅助几何设计中的一个重要问题．本文构建了一种带单参数的分段有理三次Hermite插值样条．讨论了该样条的逼近性，给出了一种提高插值曲线曲面逼近性的方法，并且给出数值例子．结果表明，对于给定的插值条件，通过选择合适的参数，依本文方法所生成的插值曲线曲面在逼近效果上好于标准三次Hermite插值曲线曲面．

关键词: 有理三次Hermite样条；三次Hermite样条；Peano-Kernel定理；形状参数；逼近性

分类号: **AMS**(2000) 41A15; 65D17　　**中图分类号**: O174.41　　**文献标识码**: A

1 引言

插值法是计算机辅助几何设计中用于曲线曲面造型的一种重要工具．标准的分段三次Hermite插值是其中的一个重要的方法．但是，在插值条件确定的情况下，分段三次Hermite插值曲线的形状完全确定的，插值曲线的逼近效果也随之确定，这种插值被称之为确定性插值．如何在插值条件确定的情况下提高逼近效果，是计算机辅助几何设计中的重要研究课题．近些年来，不少作者讨论了有理三次插值样条的逼近性[1-7]，这些插值样条都具有标准的三次Hermite插值相似的性质．上述文献在讨论插值样条的逼近性时，应用Peano-Kernel定理，证明了插值误差系数是有界的，从而，在理论上，当插值区间h_i趋于无穷小时，插值曲线逼近于被插函数，但实际应用过程中，插值区间h_i不可能趋于无穷小，否则会导致计算量的增加．至于在相同的插值条件下，这些样条在逼近效果上能否比标准三次Hermite插值样条好，这些文献均没有作比较．另外，这些有理形式的插值样条含有多个参数，使得对它们的有关逼近性讨论变得复杂．

本文提出一种分段有理三次Hermite插值曲线，每段只带一个参数，在讨论逼近性及计算参数取值时都比较简单．对于被插函数，在插值区间不趋于无穷小的情况下，若参数取值合适，生成的插值曲线在逼近效果上好于标准的三次Hermite插值曲线．数值例子表明，这种参数取值方法是有效的．

2 有理三次Hermite基函数和对应的Ferguson曲线

我们知道，对于给定的节点$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，记$h_i = x_{i+1} - x_i$，$t = \frac{x-x_i}{h_i}$，在

收稿日期: 2009-08-24．**作者简介**: 谢进(1970年12月生)，男，博士，副教授．研究方向：计算机辅助几何设计与应用逼近论．

*__基金项目__: 国家自然科学基金(61070227)；教育部科学技术研究重大项目(309017)；教育部博士点基金(20070359014)；安徽省教育厅教研重点项目(20100935)；合肥学院科研重点项目(11KY02ZD)．

区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的标准三次 Hermite 基函数具有如下形式

$$F_i(t) = 1 - 3t^2 + 2t^3, \quad F_{i+1}(t) = 3t^2 - 2t^3, \quad G_i(t) = t - 2t^2 + t^3, \quad G_{i+1}(t) = -t^2 + t^3, \tag{1}$$

它们满足

$$\begin{aligned} &F_i(0) = F_{i+1}(1) = 1, \quad F_i(1) = F_{i+1}(0) = 0, \\ &F_i'(0) = F_i'(1) = F_{i+1}'(0) = F_{i+1}'(1) = 0, \\ &G_i(0) = G_i(1) = G_{i+1}(0) = G_{i+1}(1) = 0, \\ &G_i'(0) = G_{i+1}'(1) = 1, \quad G_i'(1) = G_{i+1}'(0) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

且有 $F_i(t) + F_{i+1}(t) = 1$, $G_i(t) = -G_{i+1}(1-t)$.

基于这组基函数的三次 Hermite 插值曲线具有 C^1 连续性，但插值曲线的形状是固定不变的. 带有参数的有理形式的插值样条可以改变插值曲线的形状[1-7].

下面构建具有三次 Hermite 插值曲线性质的有理形式的插值样条曲线. 先构建有理形式的基函数.

定义 1 对任意实数 $\lambda_i > -2$, $0 \le t \le 1$，称

$$\begin{aligned} &RF_i(t) = \tfrac{1+(\lambda_i-2)t+(1-2\lambda_i)t^2+\lambda_i t^3}{1+(\lambda_i-2)t+(2-\lambda_i)t^2}, \quad RF_{i+1}(t) = \tfrac{(1+\lambda_i)t^2-\lambda_i t^3}{1+(\lambda_i-2)t+(2-\lambda_i)t^2}, \\ &RG_i(t) = \tfrac{t-2t^2+t^3}{1+(\lambda_i-2)t+(2-\lambda_i)t^2}, \qquad RG_{i+1}(t) = \tfrac{-t^2+t^3}{1+(\lambda_i-2)t+(2-\lambda_i)t^2}, \end{aligned} \tag{3}$$

为带有参数 λ_i 的有理三次 Hermite 基函数.

经简单计算知有

$$\begin{aligned} &RF_i(0) = RF_{i+1}(1) = 1, \quad RF_i(1) = RF_{i+1}(0) = 0, \\ &RF_i'(0) = RF_i'(1) = RF_{i+1}'(0) = RF_{i+1}'(1) = 0, \\ &RG_i(0) = RG_i(1) = RG_{i+1}(0) = RG_{i+1}(1) = 0, \\ &RG_i'(0) = RG_{i+1}'(1) = 1, \quad RG_i'(1) = RG_{i+1}'(0) = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

且 $RF_i(t) + RF_{i+1}(t) = 1$, $RG_i(t) = -RG_{i+1}(1-t)$.

由上面性质可知，上面的基函数具有与标准三次 Hermite 基函数相同的特性. 特别地，当 $\lambda_i = 2$ 时，有理三次 Hermite 基函数退化为三次 Hermite 基函数. 因此，可用来作两点的 Hemite 插值. 对应的带有参数的有理三次 Ferguson 曲线定义为

$$RH_i(t) = RF_i(t)p_i + RF_{i+1}(t)p_{i+1} + RG_i(t)p_i' + RG_{i+1}(t)p_{i+1}' = 0, \tag{5}$$

其中 p_i, p_{i+1} 和 p_i', p_{i+1}' 为两个插值端点和端点切矢. 在端点及端点切矢不变的情况下，利用参数 λ_i 的不同取值，可以得到不同形状的 Ferguson 曲线. 图 1 为有理三次 Ferguson 曲线，其中虚线为标准的三次 Ferguson 曲线.

从图象上看，参数具有明显的几何意义，即当参数取值大于或小于2时，对应的图象在三次 Ferguson 曲线的下面或上面. 这样，有理三次 Hermite 插值曲线就能比标准的三次 Hermite 插值曲线更能逼近或偏离被插曲线. 因而有理三次 Hermite 插值曲线有更好的实用性.

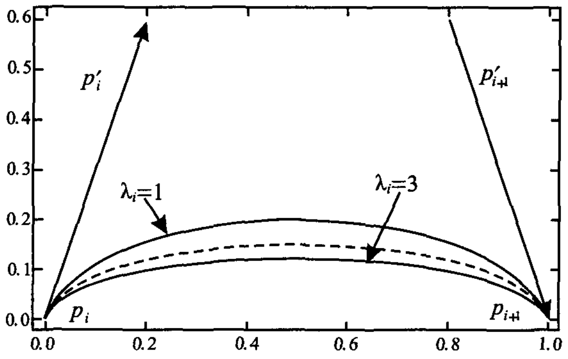

图 1: 有理三次 Ferguson 曲线

3 有理三次 Hermite 插值曲线

定义 2 给定数据 (x_i, y_i, d_i), $i = 0, 1, \cdots, n$，此处，$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 是分划点，y_i 和 d_i 为分划点 x_i 处的函数值及一阶导数值．记 $h_i = x_{i+1} - x_i$, $t = \frac{x - x_i}{h_i}$，且令参数 $\lambda_i > -2$．称

$$\begin{aligned} RH_i(x)|_{[x_i, x_{i+1}]} &= y_i RF_i(t) + y_{i+1} RF_{i+1}(t) \\ &\quad + d_i h_i RG_i(t) + d_{i+1} h_i RG_{i+1}(t), \quad i = 0, 1, \cdots, n, \end{aligned} \tag{6}$$

为 $[a, b]$ 上的分段有理三次 Hermite 插值样条．其中 $RF_i(t)$, $RF_{i+1}(t)$, $RG_i(t)$ 及 $RG_{i+1}(t)$ 为有理三次 Hermite 基函数．

显然，对给定的数据 (x_i, y_i, d_i), $i = 0, 1, \cdots, n$, $RH_i(x)$ 满足

$$RH_i(x_i) = y_i, \quad RH'_i(x_i) = d_i, \quad i = 0, 1, \cdots, n.$$

容易验证，当 $\lambda_i = 2$ 时，即为标准的分段三次 Hermite 插值样条．因而有理三次 Hermite 插值样条是三次 Hermite 插值样条的一种推广．

假如我们选择适当的参数 λ_i, $RH_i(x)$ 还能够变成 C^2 连续的插值样条．事实上，令 $RH''(x_i+) = RH''(x_i-)$, $i = 1, 2, \cdots, n-1$，可以得到如下连续性方程

$$\begin{aligned} & h_i^2 \left[(y_{i-1} - y_i)(1 + \lambda_{i-1}) + h_{i-1}(d_{i-1} + \lambda_{i-1} d_i) \right] \\ = \ & h_{i-1}^2 \left[(y_{i+1} - y_i)(1 + \lambda_i) + h_i(d_{i+1} + \lambda_i d_i) \right], \quad i = 1, 2, \cdots, n-1, \end{aligned} \tag{7}$$

称上式为 C^2 连续性约束条件．

由此，可由 $[x_0, x_1]$ 上的 λ_0 通过式 (7) 确定 λ_1，再由 λ_1，通过式 (7) 确定 λ_2，依此类推，逐段构造出 $[a, b]$ 上的 C^2 连续的有理三次 Hermite 插值曲线．

4 有理三次 Hermite 插值曲线/曲面的逼近性

设被插函数 $f(x)$ 在插值区间上是 C^2 连续可微的，对有理三次 Hermite 插值曲线，有如下的误差估计定理．

定理1 设 $f(x) \in [a,b]$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 是区间 $[a,b]$ 上的一个分划，$RH(x)$ 为有理三次Hermite插值样条，对任意给定的参数 λ_i，当 $x \in [x_i, x_{i+1}]$ 时，有

$$\|R[f]\| = \|f(x) - RH(x)\| \le \frac{1}{16} h_i^2 \|f^{(2)}(x)\|.$$

证明 因为这种插值具有局部性质，只需考虑在 $[a,b]$ 的子区间上的误差即可．容易验证：该种插值对一次多项式精确成立，于是当 $x \in [x_i, x_{i+1}]$ 时，利用Peano-Kernel定理[8]，有

$$R[f] = f(x) - RH(x) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f^{(2)}(\tau) R_x\big[(x-\tau)_+\big] \mathrm{d}\tau,$$

此处

$$R_x\big[(x-\tau)_+\big] = \begin{cases} (x-\tau) - t^2(1-t)\big[3(x_{i+1}-h_i)\big] - t^3(x_{i+1}-h_i), & x_i < \tau < x, \\ -t^2(1-t)\big[3(x_{i+1}-h_i)\big] - t^3(x_{i+1}-h_i), & x < \tau < x_{i+1}, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} p(\tau), & x_i < \tau < x, \\ q(\tau), & x < \tau < x_{i+1}. \end{cases}$$

首先考察 $q(\tau)$ 在 $[x, x_{i+1}]$ 上的性质．容易得到 $q(x) = 2t^2(t-1)(x_{i+1}-x) < 0$，且由 $q(x_{i+1}) = t^2(x_{i+1}-x) > 0$ 可知 $q(\tau)$ 在 (x, x_{i+1}) 有一个根，可求得该根为

$$x^* = x_{i+1} - \frac{h_i(1-t)}{3-2t}.$$

接下来，考察 $p(\tau)$ 在 (x_i, x) 上的性质．因为 $p(\tau) = (x-\tau) + q(\tau)$，于是 $p(x) = q(x) < 0$，且 $p(x_i) = (x - x_i) + q(x_i) = t(1-t)^2 h_i > 0$.

同样可求得 $p(\tau)$ 在 (x, x_{i+1}) 的根为

$$x_* = x_{i+1} - \frac{h_i(1+t)}{1+2t}.$$

于是就有

$$\begin{aligned}\|f(x) - RH(x)\| &\le \|f^{(2)}\|\Big[\int_{x_i}^{x_*} p(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_{x_*}^{x} |p(\tau)|\mathrm{d}\tau\Big] \int_{x_*}^{x_{i+1}} q(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \|f^{(2)}\| h_i^2 \frac{4t^2(1-t)^2}{(1+2t)(3-2t)}.\end{aligned}$$

记

$$\omega(t) = \frac{4t^2(1-t)^2}{(1+2t)(3-2t)},$$

易求得

$$\max_{0\le t\le 1} \omega(t) = \frac{1}{16}.$$

证毕

定理1说明，当插值区间 $h_i \longrightarrow 0$ 时，插值曲线能很好地逼近于被插函数．在实际应用过程中，这种逼近条件还可以适当地放宽，比如：插值区间 h_i 可以不需要很小，只要参数取值得

当，有理三次 Hermite 插值样条也能很好地逼近被插函数．甚至比三次 Hermite 插值样条逼近效果还好．这里，我们先给出“好的逼近”的定义．

定义 3　设 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的三次 Hermite 插值样条为 $H_i(x)$，有理三次 Hermite 插值样条 $RH_i(x)$，被插函数为 $y(x)$．定义

$$RH\varepsilon_i = \max_{x_i<x<x_{i+1}} |RH_i(x) - y(x)|, \quad H\varepsilon_i = \max_{x_i<x<x_{i+1}} |H_i(x) - y(x)|,$$

则当 $RH\varepsilon_i < H\varepsilon_i$ 时，称 $RH_i(x)$ 比 $H_i(x)$ 在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上对 $y(x)$ 有好的逼近．

根据定义 3，可由不等式 $RH\varepsilon_i < H\varepsilon_i$ 解得在每个区间上参数 λ_i 的取值范围，在参数 λ_i 取值范围内任取一个值,都可保证在整个插值区间上生成一条“好的逼近”曲线．

例 1　设被插函数为

$$y(x) = \frac{2}{\pi x}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right),$$

节点取 $x_i = i\,(i = 1, 2, \cdots, 10)$，即插值区间 $h_i = 1\,(i = 1, 2, \cdots, 9)$，由不等式 $RH\varepsilon_i < H\varepsilon_i$ 可计算出在各区间上参数 λ_i 的取值范围．表 1 给出了对于给定的插值条件，λ_i 的取值与各区间的误差最大值．图 2 在同一个坐标系画出了 $RH(x)$, $H(x)$ 和 $y(x)$，实际上三者在区间 $[0, 2]$ 上几乎重合，为了便于区别观察，图 2 中的 $RH(x)$ 整体上升 0.04 个单位，$H(x)$ 整体下降 0.04 个单位．图 3 表示 $RH(x)$ 与 $H(x)$ 相对于 $y(x)$ 的误差曲线，由此可见，只要参数选择的得当，有理三次样条插值曲线比三次样条插值曲线相对于被插值曲线有好的逼近．

表 1:　对给定的插值条件，λ_i 的取值与各区间的误差最大值

x_i	y_i	d_i	λ_i	$RH\varepsilon_i$	$H\varepsilon_i$
1	0.636619772	-0.636619772	1.742796037	0.000225101	0.001140174
2	0.000000000	-0.500000000	1.855965883	0.000026309	0.002618395
3	-0.212206590	0.070735530	1.980443075	0.000076469	0.000169431
4	0.000000000	0.250000000	1.780004135	0.000062045	0.001940114
5	0.127323954	-0.025464790	1.880158484	0.000004777	0.000548286
6	0.000000000	-0.166666667	1.770215018	0.000046646	0.001325298
7	-0.090945682	0.012992240	1.846344070	0.000007414	0.000554593
8	0.000000000	0.125000000	1.769263948	0.000035726	0.000985197
9	0.070735530	-0.007859503	1.829906858	0.000009867	0.000504587
10	0.000000000	-0.100000000			

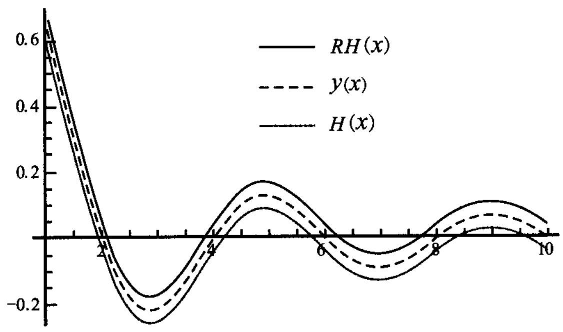

图 2:　有理三次 Hermite 插值曲线 (上)、被插曲线 (中) 和三次 Hermite 插值样条曲线 (下)

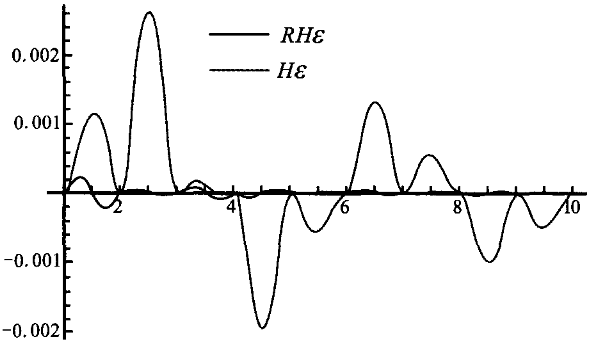

图 3:　有理三次 Hermite 插值曲线 (蓝) 和三次 Hermite 插值曲线 (红) 的误差曲线

采用张量积的方法，我们可以构建分片有理三次Hermite插值曲面．有理三次Hermite插值曲面与三次Hermite插值样条曲线相似的性质．

定义 4　设 $f(x,y)$ 为定义在 $[a,b]\times[c,d]$ 的二元函数，$a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$, $c=y_0<y_1<\cdots<y_n=d$ 是分划点，记

$$h_i=x_{i+1}-x_i,\quad h_j=y_{j+1}-y_j,\quad u=\frac{x-x_i}{h_i},\quad v=\frac{y-y_j}{h_j}.$$

称

$$RH(x,y)\Big|_{[x_i,x_{i+1}]}^{[y_i,y_{i+1}]}=\big(RF_i(u),RF_{i+1}(u),RG_i(u),RG_{i+1}(u)\big)M\begin{pmatrix}RF_i(v)\\RF_{i+1}(v)\\RG_i(v)\\RG_{i+1}(v)\end{pmatrix}\tag{8}$$

为 $[a,b]\times[c,d]$ 上插值于 $f(x,y)$ 的分片有理三次Hermite插值曲面，其中

$$M=\begin{pmatrix}f(0,0)&f(0,1)&f'_v(0,0)&f'_v(0,1)\\f(1,0)&f(1,1)&f'_v(1,0)&f'_v(1,1)\\f'_u(0,0)&f'_u(0,0)&f''_{uv}(0,0)&f''_{uv}(0,1)\\f'_u(1,0)&f'_u(1,1)&f''_{uv}(1,0)&f''_{uv}(1,1)\end{pmatrix}.$$

给定函数的端点、端点的一阶偏导数及二阶混合偏导数的值，当选择适当的参数时，有理三次Hermite插值曲面比三次Hermite插值曲面有好的逼近．

例 2　取被插函数为

$$f(x,y)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right),$$

分划点为 $a=0<1<2=b$, $c=-1<0<1=d$，即插值区域为 $[0,2]\times[-1,1]$，当参数取值为 $\lambda_1=\lambda_2=1.7922$，可计算出被插函数与有理三次Hermite插值曲面在 $[0,2]\times[-1,1]$ 上的最大误差为 3.8×10^{-4}，如图 4．而被插函数与三次Hermite插值曲面在 $[0,2]\times[-1,1]$ 上的最大误差为 1.6×10^{-2}，如图 5．

注： 有理三次Hermite插值曲面、三次Hermite插值曲面及被插函数的图象几乎重合，为了观察方便，图6和图7中的有理三次Hermite插值曲面与三次Hermite插值曲面分别下降了1个单位.

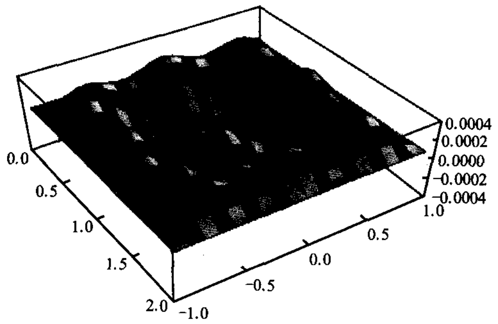

图4: 有理三次Hermite曲面与被插函数的误差

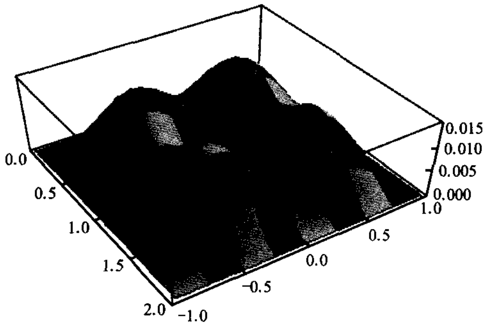

图5: 三次Hermite曲面与被插函数的误差

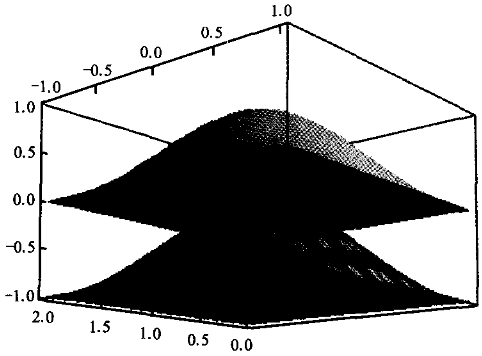

图6: 有理三次Hermite曲面(下)与被插函数(上)

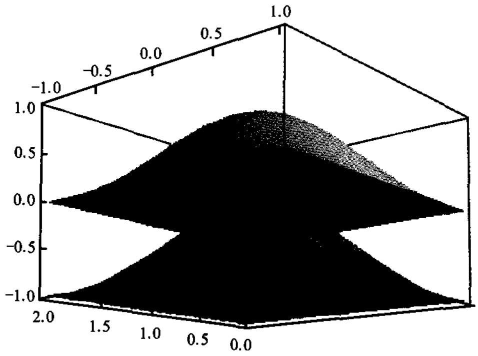

图7: 三次Hermite曲面(下)与被插函数(上)

5 结论

本文提出了一种有理三次Hermite插值曲线. 利用Peano-Kernel定理，证明了其逼近性质. 只要参数选择得当，有理三次Hermite插值曲线比标准的三次Hermite插值曲线具有较好的逼近效果. 值得一提的是，每一段插值曲线只含有一个参数，计算比较简单.

如果选择参数的合理，这种有理三次Hermite插值曲线的形状具有良好的可约束性，可另行文研究.

参考文献：

[1] Hall C A, Meyer W W. Optimal error bounds for cubic spline interpolation[J]. Journal of Approximation Theory, 1976, 16(2): 105-122

[2] Duan Q, Djidjeli K, Price W G, *et al*. Rational cubic spline based on function values[J]. Computer and Graphics, 1998, 22(4): 479-486
[3] Duan Q, Djidjeli K, Price W G, *et al*. The approximation properties of some rational cubic splines[J]. International Journal of Computer Mathematics, 1999, 72(2): 155-166
[4] Sarfraz M. Cubic spline curves with shape control[J]. Computer and Graphics, 1994, 18(5): 707-713
[5] Duan Q, Liu A K, Cheng F H. Constrained interpolation using rational cubic spline with linear denominators[J]. Korean Journal of Computational and Applied Mathematics, 1999, 6(1): 203-215
[6] 刘爱奎，段奇，单沪军，等. 加权有理三次插值的逼近性质及其应用[J]. 高校应用数学学报A辑，2000, 15(2): 211-218
Liu A K, Duan Q, Shan H J, *et al*. The approximation and application of the weighted rational cubic interpolation[J]. Applied Mathematics: A Journal of Chinese Universities, 2000, 15(2): 211-218
[7] 来翔，刘爱奎，段奇. 一类具有线性分母的有理插值样条的逼近问题[J]. 工程数学学报，2002, 19(1): 94-98
Lai X, Liu A K, Duan Q. The error estimation of a rational cubic spline[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2002, 19(1): 94-98
[8] 黄友谦，李岳生. 数值逼近(第二版)[M]. 北京：高等教育出版社，1987
Huang Y Q, Li Y S. Numerical Approximation (2nd Edition)[M]. Beijing: Higher Education Press, 1987

Rational Cubic Hermite Interpolating Spline and its Approximation Properties

XIE Jin[1,2], TAN Jie-qing[2], LI Sheng-feng[3]

(1- School of Computer & Information, Hefei University of Technology, Hefei 230009;
2- Department of Mathematics and Physics, Hefei University, Hefei 230601;
3- Department of Mathematics and Physics, Bengbu College, Bengbu 233000)

Abstract: Improving the approximability of interpolating curves/surfaces is an important issue in the computer aided geometric design. A piecewise rational cubic Hermite interpolating spline with a single parameter is constructed in this paper. The approximation properties of the interpolating spline are studied and a method for improving the approximability of the curves/surfaces is introduced. Examples are given to illustrate the advantages of our method. The results show that, for given interpolating conditions, if the parameters are chosen properly, the introduced interpolating curves/surfaces can approximate the interpolated functions better than the standard cubic Hermite interpolating curves/surfaces.

Keywords: rational cubic Hermite spline; cubic Hermite spline; Peano-Kernel theorem; shape parameter; approximation

Received: 24 Aug 2009. **Accepted:** 21 Apr 2010.
Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (61070227); the Key Project of Scientific Research Foundation, Ministry of Education of China (309017); the Doctoral Program Foundation of Ministry of Education of China (20070359014); the Key Project of Scientific Research Foundation of Anhui Provincial Education Department (20100935); the Key Project of Scientific Research Foundation of Hefei University (11KY02ZD).